Problema 4

a) Avem $l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{x^2+ax+b}=\dfrac{0}{1+a+b}=\begin{cases}0, daca 1+a+b\neq 0\\ \dfrac{0}{0}, daca 1+a+b=0\end{cases}$ și cum $l=\dfrac{1}{2}$ obținem

$1+a+b=0\Rightarrow b=-1-a(1p)$. Folosind $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t^2}=\dfrac{1}{2}(1p)$ limita devine

$l=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1+a}=\begin{cases}0, daca 2+a\neq 0\\ \dfrac{0}{0}, daca 2+a=0\end{cases}$ rezultă $2+a=0\Rightarrow a=-2$ (1p)

Deci $a=-2, b=1.$ sunt valorile cerute.

b) Fie $A\subset\mathbb{R}$ marginită și presupunem că f nu este marginită pe A, deci există $x_n\in A$ astfel incât $f(x_n)\to\infty$ sau $-\infty$. Cum șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, din lema lui Cesaro putem extrage un subșir convergent $x_{k_n}\to x^*$. Atunci $f(x_{k_n})\to f(x^*-0)$ (sau la $f(x^*+0)$). De aici rezultă $\{f(x_{k_n})\}$ este marginită, contradictie.(4p)